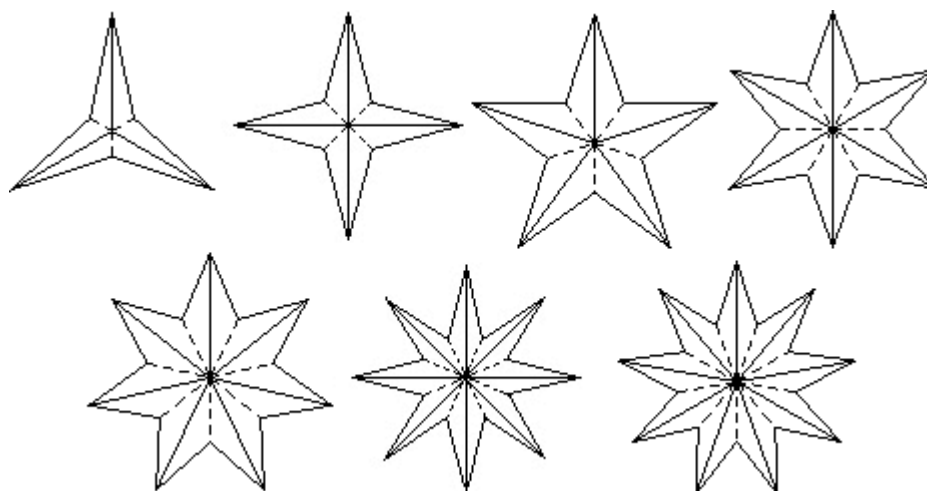


Brett-og-klipp stjerner



Første gang jeg så disse stjernene var i en artikkel i et av julenumrene til det danske tidsskriftet Matematik. Artikkelen het "Stjernekalvade" og var skrevet av Jørgen Kongsted. Jeg ble med en gang fascinert over hvor enkle stjernene var å lage og over hvor mange muligheter arbeidet ga til å konkretisere geometriske begreper og til å utforske symmetrier.

Det kan også være en trøst for skoler med innkjøpsstans at man ikke trenger mer enn litt papir og ei saks for å lage dekorativ julepynt. Stjernene blir flotte selv med vanlig, hvitt kopipapir. Man kan bruke dem til å dekorere julekort, feste dem på vinduet eller plissere dem og bruke dem som dekorasjon på julebordet. Og hvem sier at stjerner kun er aktuelle i jula? Her er det så mye interessant matematikk at man trygt kan forsvare å ta dem fram når som helst på året.

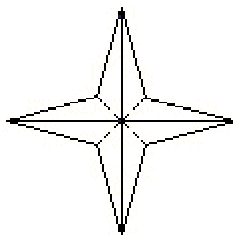
Alle stjernene er laget ved å brette papiret på en bestemt måte og så utføre ett eneste klipp med saksa. Underveis i brettingen kan man stoppe opp og diskutere geometriske former, vinkler og andre begreper. Man kan brette ut arket før man klipper og se på hvilke former og vinkler som dannes av brettelinjene. Etter at stjernen er brettet ut, bør man benytte sjansen til å snakke om hvilke symmetrier stjernen har. De didaktiske mulighetene er mange!

Eksempel på matematiske begreper man kan trekke inn:

- vinkelhalvering
- normal / midtnormal
- diagonal
- trekanter av ulike typer: likebeint, likesidet, 30° - 60° - 90°
- katet, hypotenus
- vinkelstørrelser
- stump/spiss vinkel
- speilingssymmetri
- rotasjonssymmetri
- trigonometri (hvis en vil regne på hvor mye av arket en må klippe av for å lage ei stjerne med f.eks. 5 eller 7 tagger)

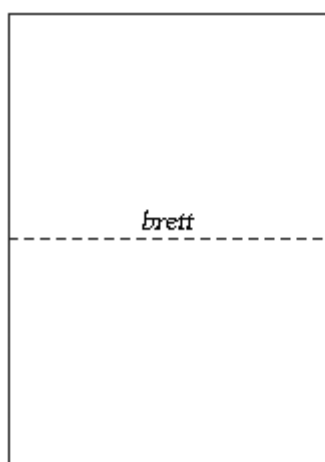
...

Stjerne med 4 tagger – fra et rektangel

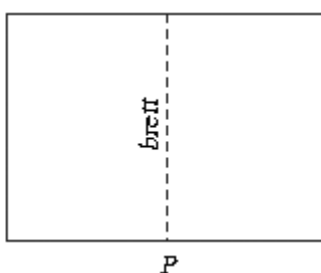


Start med et rektangulært papirark (f.eks. et A4-ark). Se illustrasjon nedenfor.

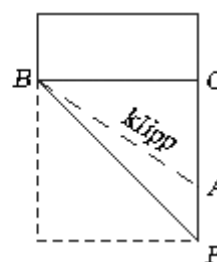
- Brett midtnormalen til de lengste sidene ved å føre kortsidene sammen (1).
- Brett nok en gang midtnormalen til de lengste sidene (2). Legg merke til hvor punkt P havner (dette er punktet midt i det arket du startet med).
- Halver ved brette den rette vinkelen i punkt P (3). Brett en "flipp" til hver side for å unngå en for tykk papirbrett.
- Klipp gjennom alle papirlagene fra A til B som vist på fig (3). Hvor du starter klippet får betydning for utseende på stjernespissene. På figuren har vi valgt å starte slik at PA er ca. 1/3 av PC.



(1)





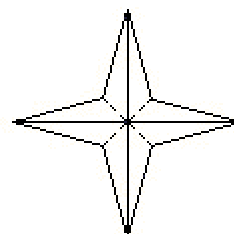
(2)



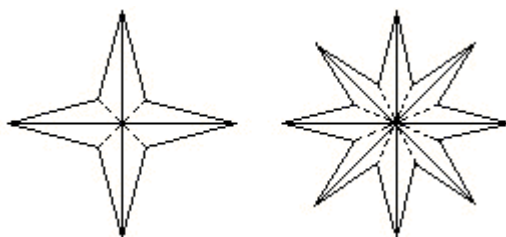
(3)

Brett ut – og se at du har fått en stjerne med fire tagger, også kalt en Betlehemsstjerne.

Stjernen kan gjøres tredimensjonal ved plissering. La de lange foldene være "fjell"-brett () og de korte være "dal"-brett (.

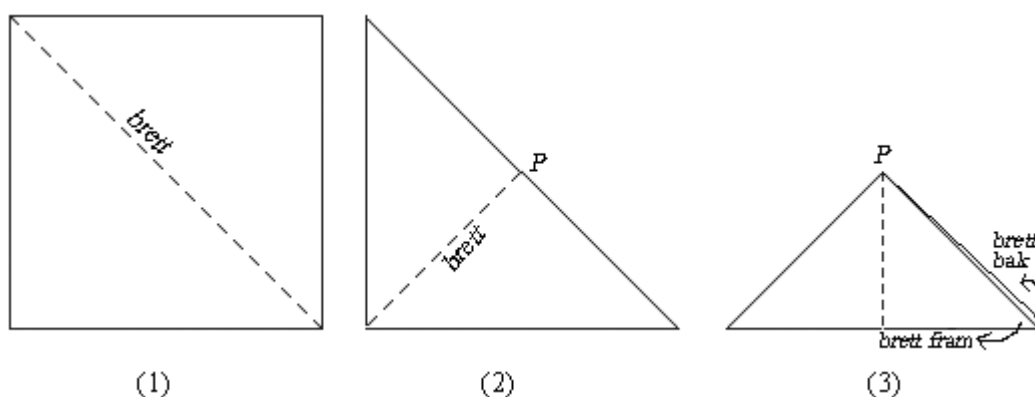


Stjerner med 4 og 8 tagger



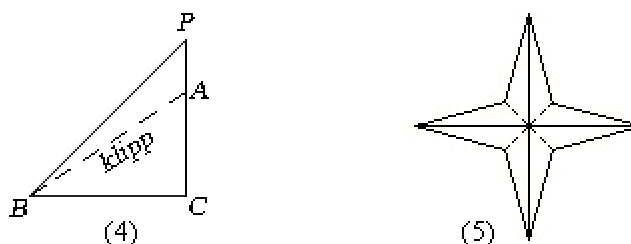
Du kan også lage 4-taggete stjerner med utgangspunkt i et kvadratisk ark. Fra den samme starten, kan vi dessuten lage 8-taggete stjerner.

- Lag en brett langs den ene diagonalen (1). Du har nå fått en likebeint, rettvinklet trekant.
- Halver den rette vinkelen ved å brette trekanten slik at de to katetene faller sammen (2). Du har nå fått en ny trekant – formlik med den forrige.
- Legg merke til at langs den ene kateten er det to papirlag. Halver den rette vinkelen i P ved å brette det fremste av disse papirlagene fram og det bakerste bakover (3). (Grunnen til at vi bretter et lag til hver side er å unngå en for tykk brett.) Du har nå fått enda en trekant – formlik med de to forrige.



4 tagger

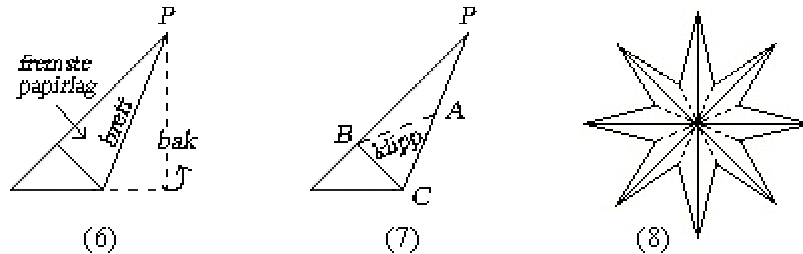
Her gjenstår kun ett klipp med saksa. Klippet skal gå gjennom alle papirlagene fra A til B som vist nedenfor på fig (4). Hvor du starter klippet får betydning for utseende på stjernespissene. På figuren har vi valgt å starte slik at PA er ca. $\frac{1}{3}$ av PC.



Brett ut – og se at du har fått en stjerne med fire tagger (5).

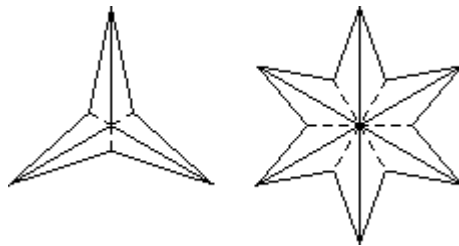
8 tagger

Du trenger igjen en likesidet trekant lik den som ble brettet ferdig i (3) ovenfor. Legg merke til at langs den kateten som utgjør det ene vinkelbeinet til vinkelen i P, er det to lag med papir. Du skal nå halvere vinkelen i P ved å brette det fremste av disse lagene fram og det bakerste bak (6).



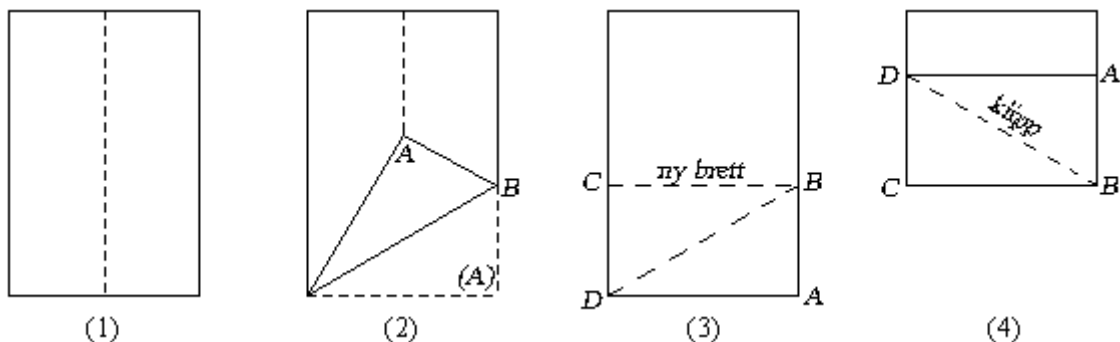
Klipp nå ett klipp gjennom alle papirlagene fra A til B som vist over på fig (7). Her er PA ca. halvparten av PC. Brett ut – og se at du har fått en stjerne med åtte tagger (8).

Stjerner med 3 og 6 tagger



For å lage disse stjernene med 3 og 6 tagger, skal vi ta utgangspunkt i et ark formet som en likesidet trekant. Et slikt ark kan vi lage av et rektangulært ark (f.eks. et A4-ark):

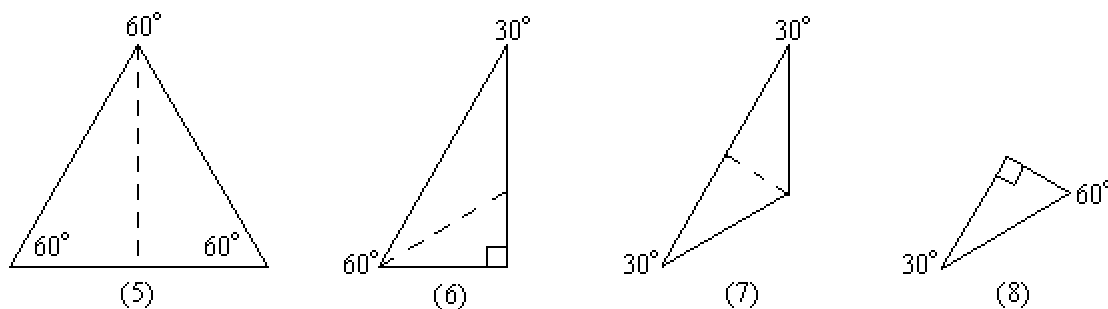
- Brett midnormalen til de korteste sidene ved å føre langsidenes sammen. Brett ut (1).
- Brett hjørne A opp til det møter midnormalen fra forrige trinn, slik at bretten går gjennom nedre venstre hjørne. Vi finner da punktet B (2). Brett ut igjen!
- Du skal nå brette rektangelet ABCD om punkt B (3). Matematisk kan vi si at vi bretter normalen til langsiden oppreist i punkt B. Resultatet av brettingen ser du i (4).
- Nå klipper du – gjennom begge papirlagene – langs brettelinjen BD (4).



Ved utfolding vil du se at du har fått en likesidet trekant. (For å bevise dette trenger du kun setningen som sier at i en rettvinklet trekant der minste katet er halvparten av hypotenusen, så er de andre vinklene 30° og 60° . Du oppfordres herved til å prøve!)

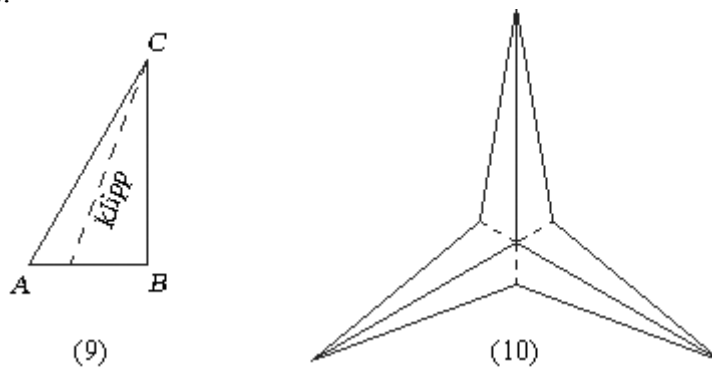
Nå begynner vi å brette:

- Først halverer du den ene vinkelen i trekanten (5) (du kan bruke den gamle BC-linjen). Resultatet blir en 30° - 60° - 90° - trekant.
- Brett så den korteste kateten opp mot hypotenusen (6) (dvs. halver vinkelen på 60°). Resultatet blir en likebeint trekant med to 30° 's vinkler.
- Halver den stumpe vinkelen ved å brett til motsatt side (7). (Vi brettet til motsatt side for å unngå en for kraftig brett.)



3 tagger

Vi tar utgangspunkt i trekanten som ble brettet ferdig i (8) (nedenfor er den noe forstørret). Klipp gjennom alle papirlagene fra ca. $1/3$ av lengden AB målt fra A, og opp til C som vist nedenfor på fig (9).



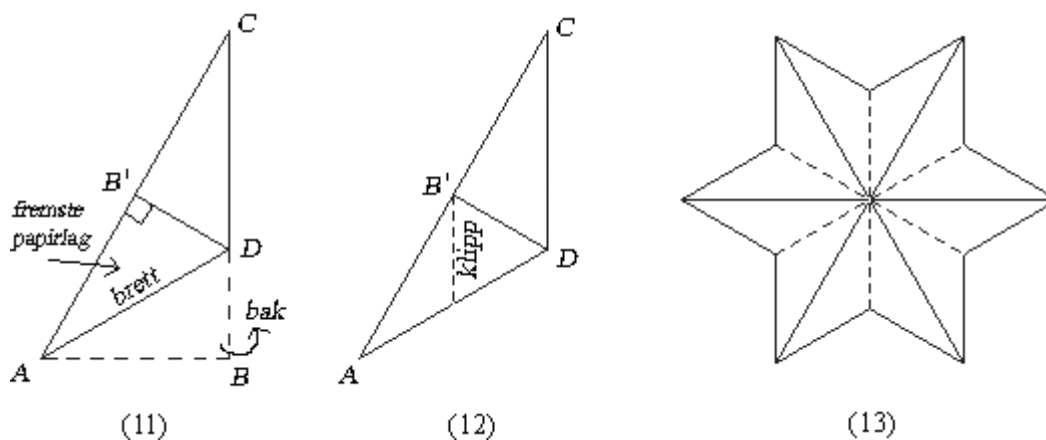
Brett ut – og se at du har fått en stjerne med tre tagger (10). Det likner kanskje ikke så mye på en julestjerne, men noen kjenner sikkert igjen logoen til et kjent bilmerke?

6 tagger

På ny tar vi utgangspunkt i trekanten fra (8) (nedenfor er den noe forstørret).

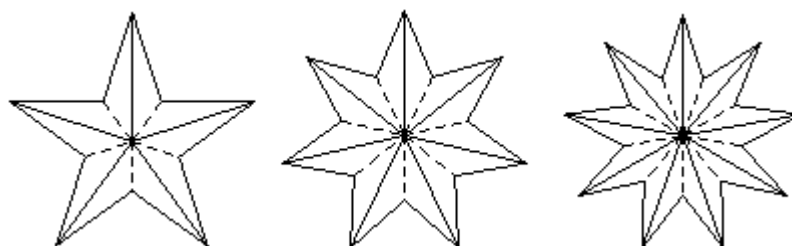
- Legg merke til at langs den korteste kateten er det to papirlag. Ta det fremste av disse og brett opp slik at vinkelen i A halveres (11).

- Brett det andre papirlaget bak. Resultatet etter bretingen er den likebeinte trekanten ADC (12).
- Nå skal du klippe – fra ca. halvveis på sida AD og opp til den rette vinkelen i B' (12).
- Brett ut – og se at du har fått en stjerne med seks tagger (13).



Tips: Hvis du i stedet klipper langs siden B'D, får du en 6-kant. Så her er alt klappet og klart til å klippe fine snøkrystaller.

Stjerner med 5, 7 og 9 tagger



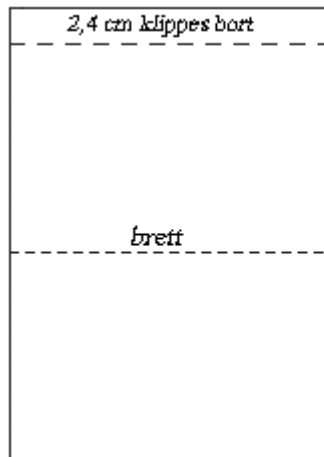
For å lage stjernene med 5 og 7 tagger, skal vi ta utgangspunkt i et A4-ark som vi klipper en remse av slik at det får den proporsjonen vi trenger. Hvor mye vi må klippe bort, avhenger av hvor mange tagger stjerna skal ha. Utregningen gjør bruk av enkel trigonometri, og det vil være en overkommelig oppgave for videregående elever å se på dette. For stjernen med 9 tagger skal vi bruke et helt A4-ark. Det er egentlig 0,5 mm for bredt, men dette får ingen praktisk betydning.

Når man først har det rette arket, er framgangsmåten for de tre stjernene omtrent den samme, og vanskegraden er derfor temmelig lik.

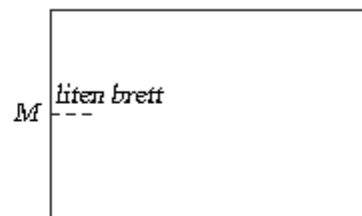
Stjerne med 5 tagger

- Ta et A4-ark og klipp bort 2,4 cm i den ene enden (1a). Resultatet blir et ark med størrelse 21 cm × 27,3 cm.

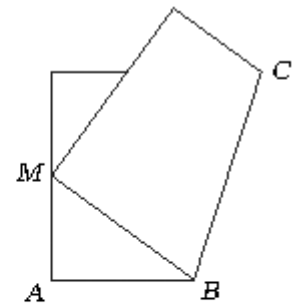
- Brett arket dobbelt slik at bretten er parallell med klippekanten (1a). La arket ligge med bretten mot deg.
- Lag en liten brett i midtpunktet på den venstre kortsiden (1b).
- Fold det rette hjørnet nederst til høyre opp mot midtpunktet, M, og lag en brett (1c).



(1a)



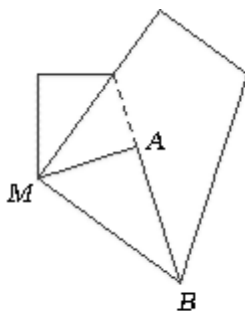
(1b)



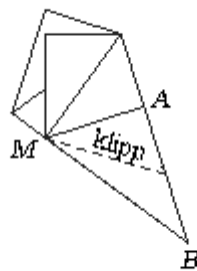
(1c)

$\angle MBC$ er dobbelt så stor som $\angle ABM$. Dette ville ikke vært tilfelle dersom vi ikke hadde klippet av A4-arket.

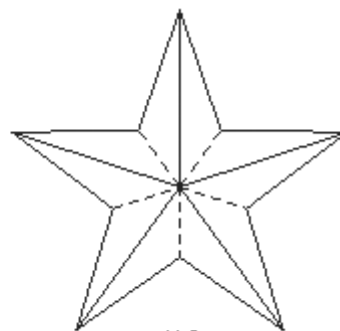
- Brett trekant ABM fram over kanten BM (1d). Pass på at bretten følger kanten.
- Halver ved bretting vinkelen i B (1d). Brett **bakover** slik at trekant MBA fortsatt er synlig! Resultatet ser du i (1e).
- Klipp fra ca. halvveis på siden AB og til M (1e). (Tips: Det kan også være interessant å klippe langs linja AM. Hva får du da?)
- Brett ut – og se at du har fått en stjerne med fem tagger (1f).



(1d)



(1e)

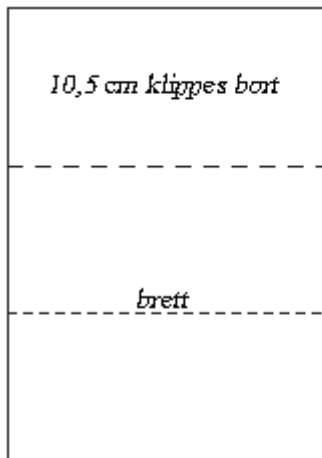


(1f)

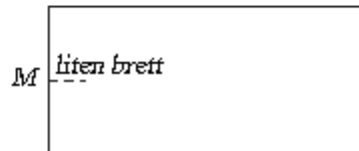
Stjerne med 7 tagger

- Ta et A4-ark og klipp bort 10,5 cm i den ene enden (2a). Resultatet blir et ark med størrelse 21 cm \times 19,2 cm.
- Brett arket dobbelt slik at bretten er parallell med klippekanten (2a). La arket ligge med bretten mot deg.

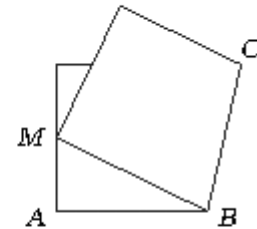
- Lag en liten brett i midtpunktet på den venstre kortsiden (2b).
- Fold det rette hjørnet nederst til høyre opp mot midtpunktet, M, og lag en brett (2c).



(2a)



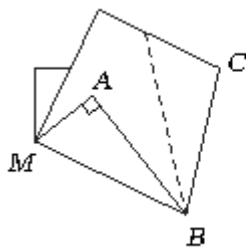
(2b)



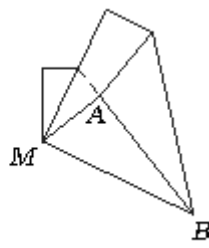
(2c)

$\angle MBC$ er tre ganger så stor som $\angle ABM$. Dette ville ikke vært tilfelle dersom vi ikke hadde klippet av A4-arket.

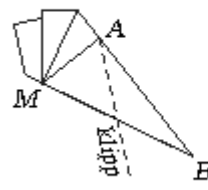
- Brett trekant ABM fram over kanten BM (2d). Pass på at bretten følger kanten.
- Halver $\angle ABC$ ved å folde BC inn mot kateten AB (2d). Resultatet ser du i (2e).
- Halver nå vinkelen i B ved å brette bakover. Bretten vil følge AB (2e). Resultatet ser du i (2f)
- Klipp fra ca. halvveis på hypotenusen MB og opp til den rette vinkelen i A (2f).
- Brett ut – og se at du har fått en stjerne med sju tagger (2g).



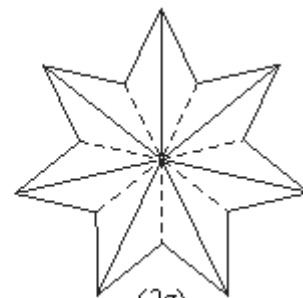
(2d)



(2e)



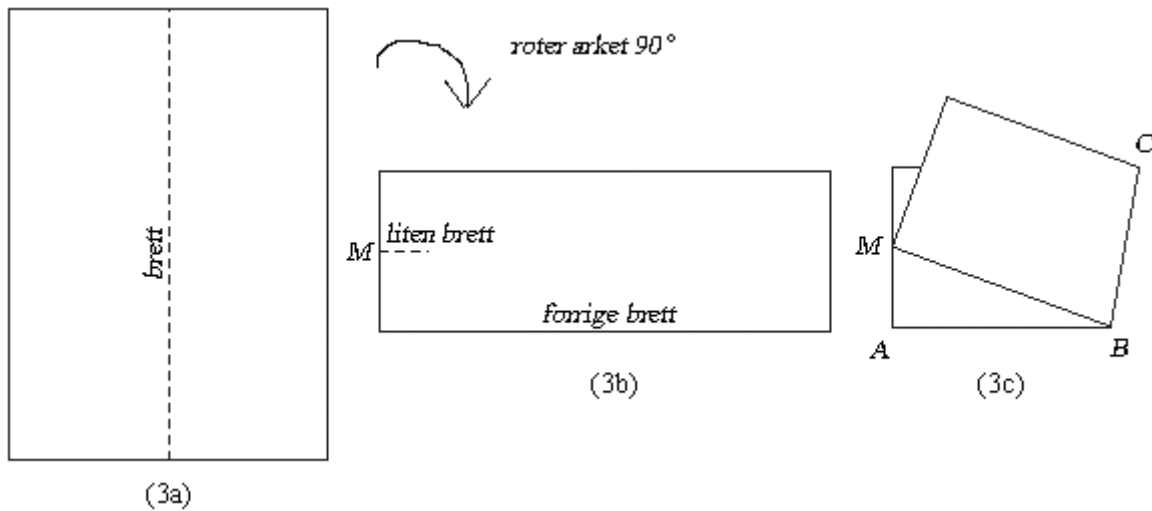
(2f)



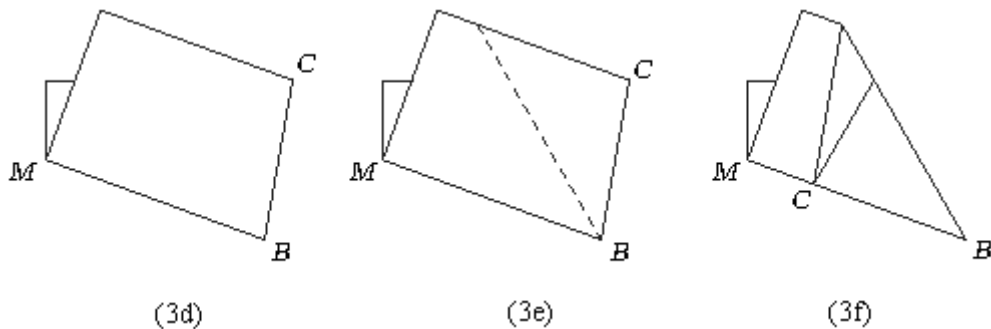
(2g)

Stjerne med 9 tagger

- Brett et A4-ark dobbelt ved å folde langsidenes mot hverandre (3a). La arket ligge med bretten mot deg.
- Lag en liten brett i midtpunktet på den venstre kortsiden (3b).
- Fold det rette hjørnet nederst til høyre opp mot midtpunktet, M, og lag en brett (3c). $\angle MBC$ er fire ganger så stor som $\angle ABM$. (Helt nøyaktig er det ikke siden A4-arket som sagt er 0,5 mm for bredt.)



- Brett trekant ABM inn **bak** kanten BM (3d). Pass på at bretten følger kanten (det kan være lettere om du snur arket, bare husk å snu det tilbake igjen).
- Halver vinkel B (3e). Resultatet ser du i (3f).



- Halver på nytt vinkelen i B, men brett den fremste flippen (der BC er ei side) framover (3g) og den bakre flippen (der BM er ei side) bakover. Resultatet ser du i (3h).
- Klipp fra ca. halvveis på siden BD og opp til punkt C (3h). (Det kan være litt vrient å klippe gjennom så mange lag papir. Hvis papirlagene glir i forhold til hverandre, så "finstuss" klippekanten til slutt.)
- Brett ut – og se at du har fått en stjerne med ni tagger (3i).

